УДК 512.662.1

М. В. Ладошкин

ГОМОТОПИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫЙ АНАЛОГ СИМПЛИЦИАЛЬНОГО ОБЪЕКТА[1]

Аннотация. Рассматривается вопрос построения гомотопически устойчивого аналога симплициального объекта. Предъявляется конструкция высших симплициальных операторов, доказывается теорема об их существовании на гомологиях цепного комплекса. Доказательство теоремы существования конструктивно, что позволяет строить полученные высшие симплициальные множества как гомотопически устойчивые аналоги симплициальных на гомологиях цепных комплексов.

Ключевые слова: симплициальный объект, гомологии, гомотопическая устойчивость, SDR-ситуация, высшие симплициальные операторы.

Abstract. The article considers the construction of homotopy steady analog of simplicial object. The author introduces a design of highest simplicial operators and proves a theorem of their existence on chain complex homologies. The proof of the existence theorem is constructive, which allows to build the received highest simplicial sets as homotopy steady analogs, that are simplicial on chain complex homologies.

Key words: simplicial object, homology, homology stability, SDR-situation, the higher simplicial operators.

Введение

В последнее время в алгебраической топологии актуальным является процесс создания аналогов алгебраических структур, которые были бы устойчивы при переходе к гомотопическому случаю. Первые работы в этом направлении относятся к 70-м годам прошлого века (Дж. Мэй, Т. Кадеишвили, В. Смирнов) и касались построения аналога градуированных и дифференциальных алгебр [1].

Результаты, представленные в данной работе, являются обобщением работ, начатых в [2], однако отличаются от нее отсутствием геометрической реализации и, соответственно, более простым алгоритмом получения высших симплициальных соотношений. Аналоги высших граней и вырождений, необходимые для построения продолжения всей симплициальной структуры, были получены автором в [3, 4]. Основными результатами данной работы является сама конструкция аналога симплициального объекта, а также доказательство его теоремы существования.

[1] Работа выполнена в рамках проекта «Построение гомотопически устойчивого аналога симплициального объекта» ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.». Государственный контракт № П1226 от 7 июня 2010 г.

Все основные утверждения, конструкции и доказательства теорем приводятся над полем характеристики 2, т.е. над $\mathbf{Z_2}$. Подобный прием является часто используемым в алгебраической топологии, так как позволяет избежать постоянной записи знаков, а также проверки их совпадения. Однако большинство утверждений, верных для случая поля характеристики 2 остаются верными и для произвольного случая.

1. Основные сведения о высших симплициальных гранях и вырождениях

Сначала напомним основное определение симплициального множества, следуя [5].

Определение 1. Симплициальное множество K – упорядоченный набор множеств, индексированный неотрицательными целыми числами, рассматриваемый вместе с отображениями $d_i : K_q \to K_{q-1}$ и $s_i : K_q \to K_{q+1}$, $0 < i \le q$, которые удовлетворяют следующим условиям:

(i) $d_i d_j = d_{j-1} d_i$, если $i < j$,

(ii) $s_i s_j = s_{j+1} s_i$, если $i < j$,

(iii) $d_i s_j = s_{j-1} d_i$, если $i < j$,

$d_j s_j = id = d_{j+1} s_j$,

$d_i s_j = s_j d_{i-1}$, если $i > j+1$. (1)

Элементы K_q будем называть q-симплексом или симплексом размерности q. Отображения d_i и s_j называют соответственно операторами граней и вырождений.

Перейдем к описанию аналога симплициальной грани согласно [3].

Для этого рассмотрим сначала упорядоченный набор натуральных чисел $i_1,...,i_k$, в котором каждый индекс также принадлежит множеству натуральных чисел.

Определение 2. Будем обозначать $t(i_j)$ для числа i_j, входящего в $i_1,...,i_k$, если $i_{r_1} < i_j,...,i_{r_t} < i_j$ и $r_1 > j,...,r_t > j$. Другими словами, t – количество чисел $i_{r_1} < i_s$, стоящих правее i_s. Также можно сказать, что $t(i_j)$ – число инверсий в подстановке $(i_1,...,i_k)$, соответствующих элементу i_j.

Определение 3. Будем обозначать $\tilde{i}_j$ для числа i_j, входящего в $i_1,...,i_k$, если $\tilde{i}_j = i_j - t$, где t вычисляется согласно определению 2.

Рассмотрим цепной комплекс X, т.е. модуль $X = \oplus C_i$, где каждый C_i – модуль, снабженный последовательностью отображений $d_i : C_i \to C_{i-1}$, называемых дифференциалами и удовлетворяющих условию

$$d_i(d_{i+1}) = 0. \quad (2)$$

Определим на этом комплексе структуру Δ_∞-множества.

Определение 4. Δ_∞-множеством будем называть цепной комплекс X с дифференциалом d, снабженный набором отображений

$$\partial_{i_1,i_2,\ldots,i_n} : X_m \to X_{m-1},$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$d\partial_i = \partial_i d\,, \tag{3}$$

$$\sum \partial_{\tilde{\sigma}(i_1),\tilde{\sigma}(i_2),\ldots,\tilde{\sigma}(i_n)} = 0, \tag{4}$$

где σ – подстановка из симметрической группы S_k, а суммирование идет по всем подстановкам, действующим на данный набор $i_1,\ldots,i_k$.

Отображения $\partial_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ будем называть высшими гранями.

В работе [4] показано существование Δ_∞-множеств на гомологиях цепного комплекса с заданными на нем симплициальными гранями.

Приведем аналогичные построения для симплициальных вырождений согласно [5].

Определение 5. Будем обозначать $\hat{i}_j$ для числа i_j, входящего в $i_1,\ldots,i_k$, если $\hat{i}_j = i_j + t$, где t вычисляется согласно определению 2.

Определим на цепном комплексе структуру высших симплициальных вырождений.

Определение 6. Будем говорить, что на цепном комплексе X с дифференциалом d заданы высшие симплициальные вырождения, если цепной комплекс снабжен набором отображений $s_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$

$$s_{i_1,i_2,\ldots,i_n} : X_m \to X_{m+1},$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$ds_i = s_i d; \tag{5}$$

$$\sum s_{\hat{\sigma}(i_1),\hat{\sigma}(i_2),\ldots,\hat{\sigma}(i_n)} = 0\,, \tag{6}$$

где σ – подстановка из симметрической группы S_k, а суммирование идет по всем подстановкам, действующим на данный набор $i_1,\ldots,i_k$. Отображения $s_{i_1}, s_{i_2},\ldots,s_{i_k}$ будем называть высшими вырождениями.

В работе [4] доказано существование структуры высших симплициальных вырождений гомологий цепного комплекса, на котором заданы цепные вырождения, удовлетворяющие условиям (ii) из определения 1.

2. Построение гомотопически устойчивого аналога симплициального объекта

Опишем структуру гомотопически устойчивого аналога симплициального объекта.

Определение 7. Рассмотрим Δ_∞-множество с определенными на нем высшими вырождениями. Будем называть этот объект S_∞-объектом, если выполняются следующие условия:

$$\sum_{\sigma \in S_k} \sum_{I_\sigma} \partial_{\tilde{\sigma}(i_1),\ldots,\tilde{\sigma}(i_t)} \partial_{\tilde{\sigma}(i_{t+1}),\ldots,\tilde{\sigma}(i_n)} = 0; \tag{7}$$

$$\sum_{\sigma \in S_k} \sum_{I_\sigma} s_{\hat{\sigma}(i_1),\ldots,\hat{\sigma}(i_k)} s_{\hat{\sigma}(i_{k+1}),\ldots,\hat{\sigma}(i_n)} = 0. \tag{8}$$

Суммирование в формулах (7), (8) идет в первом случае по всем возможным перестановкам из симметрической группы S_k, а во втором – по множеству I_σ всех разбиений набора $(\tilde{\sigma}(i_1),\tilde{\sigma}(i_2),\ldots,\tilde{\sigma}(i_n))$ или $(\hat{\sigma}(i_1),\hat{\sigma}(i_2),\ldots,\hat{\sigma}(i_n))$ на два строго упорядоченных блока: или $(\tilde{\sigma}(i_1),\ldots,\tilde{\sigma}(i_k))$ и $(\tilde{\sigma}(i_{k+1}),\ldots,\tilde{\sigma}(i_t))$, или $(\hat{\sigma}(i_1),\ldots,\hat{\sigma}(i_k))$ и $(\hat{\sigma}(i_{k+1}),\ldots,\hat{\sigma}(i_t))$, т.е. блоки, в которых выполняется условие $\tilde{\sigma}(i_1) < \tilde{\sigma}(i_2) < \ldots < \tilde{\sigma}(i_k)$ и $\tilde{\sigma}(i_{k+1}) < \tilde{\sigma}(i_{k+2}) < \ldots < \tilde{\sigma}(i_n)$ (или $\hat{\sigma}(i_1) < \hat{\sigma}(i_2) < \ldots < \hat{\sigma}(i_k)$ и $\hat{\sigma}(i_{k+1}) < \hat{\sigma}(i_{k+2}) < \ldots < \hat{\sigma}(i_n)$); символ $\tilde{\sigma}(i_1)$ рассматривается в смысле определения 3; символ $\hat{\sigma}(i_1)$ рассматривается в смысле определения 5.

Существование S_∞-объектов непосредственно следует из результатов, полученных в [3, 4]. Заметим лишь, что гомологии цепных комплексов рассматриваются как комплексы с нулевым дифференциалом.

Формулы (7) и (8) для высших симплициальных соотношений играют роль условий (i) и (ii) из формулы (1) определения 1.

Рассматривая определение симплициального множества, следует отметить, что в состав условий, определяющих указанную алгебраическую структуру, входят не только симплициальные грани и вырождения порознь, но и соотношения, которые определяют их взаимосвязь. В определении 1 этим условиям будут соответствовать соотношения (iii).

Опишем аналог этих конструкций в гомотопически устойчивом случае. Для этого нам придется дополнить высшие вырождения и высшие грани (Δ_∞-множество) дополнительными операциями, которые образуют связь, соединяющую в единое целое два вышеуказанных понятия.

Определение 8. Будем называть S_∞-объект высшим симплициальным множеством, или, для краткости, S_∞-множеством, если на нем дополнительно заданы отображения $\partial s^{j_1,j_2,\ldots,j_t}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$, удовлетворяющие условию: для любой упорядоченной последовательности $i_1,\ldots,i_k\ j_1,\ldots,j_t$ выполняется соотношение

$$\sum_{\sigma \in S_k} \sum_{I_\sigma} r_{\tilde{\sigma}(i_1),\ldots,\tilde{\sigma}(i_t)} r_{\tilde{\sigma}(i_{t+1}),\ldots,\tilde{\sigma}(i_n)} = 0, \tag{9}$$

где суммирование идет в первом случае по всем возможным перестановкам из симметрической группы S_k, а во втором – по множеству I_σ всех разбиений набора $(\tilde{\sigma}(i_1),\tilde{\sigma}(i_2),\ldots,\tilde{\sigma}(i_n))$ на два строго упорядоченных блока $(\tilde{\sigma}(i_1),\ldots,\tilde{\sigma}(i_k))$ и $(\tilde{\sigma}(i_{k+1}),\ldots,\tilde{\sigma}(i_t))$, т.е. блоки, в которых выполняется условие $\tilde{\sigma}(i_1) < \tilde{\sigma}(i_2) < \ldots < \tilde{\sigma}(i_k)$ и $\tilde{\sigma}(i_{k+1}) < \tilde{\sigma}(i_{k+2}) < \ldots < \tilde{\sigma}(i_n)$, символ $\tilde{\sigma}(i_1)$ рассматривается в смысле определения 3. Символ $r_{\tilde{\sigma}(i_1),\ldots,\tilde{\sigma}(i_t)}$ будет иметь в данной формуле различное значение в зависимости от значений, входящих в него индексов, а именно:

$$r_{\tilde\sigma(i_1),\ldots,\tilde\sigma(i_t)} = \begin{cases} \partial_{\tilde\sigma(i_1),\ldots,\tilde\sigma(i_t)}, \text{ если } \sigma(s_q) = i_k \text{ для некоторых } q \text{ и } k; \\ s_{\hat\sigma(i_1),\ldots,\hat\sigma(i_t)}, \text{ если } \sigma(s_q) = j_k \text{ для некоторых } q \text{ и } k; \\ \partial s^{\tilde\sigma(p_1),\ldots,\tilde\sigma(p_t)}_{\tilde\sigma(s_1),\ldots,\tilde\sigma(s_t)}, \begin{array}{l} \text{если } \sigma(s_q) = i_k \text{ для некоторых } q \text{ и } k, \\ \sigma(p_q) = j_k \text{ для некоторых } q \text{ и } k. \end{array} \end{cases}$$

Таким образом, кратко описывая правило определения значения символа $r_{\tilde\sigma(i_1),\ldots,\tilde\sigma(i_t)}$, можно сказать, что оно сохраняет принадлежность символа после действия на него подстановки, т.е. символы, относящиеся к вырождениям и граням, остаются связанными с высшими гранями и вырождениями соответственно.

Легко видеть, что определение S_∞-множества является обобщением понятия S_∞-объекта. Более того, в определении S_∞-множества можно обойтись без использования понятия S_∞-объекта, если принять понятие высшего симплициального оператора $\partial s^{j_1,j_2,\ldots,j_t}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ как обобщение понятия высшей грани и высшего вырождения. Другими словами, высшая грань – это высший симплициальный оператор, в котором присутствуют только нижние индексы, высшее вырождение – высший симплициальный оператор только с верхними индексами. Обобщая вышесказанное, можно дать другое определение S_∞-объекта.

Определение 9. Будем называть высшим симплициальным множеством, или, для краткости, S_∞-множеством, цепной комплекс X с заданными на нем высшими операторами $\partial s^{j_1,j_2,\ldots,j_t}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$, удовлетворяющими следующим условиям:

$$d\partial s_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = \partial s_{i_1,i_2,\ldots,i_k} d; \tag{10}$$

$$d\partial s^{j_1,j_2,\ldots,j_t} = \partial s^{j_1,j_2,\ldots,j_t} d, \tag{11}$$

и для любой упорядоченной последовательности $i_1,\ldots,i_k\ j_1,\ldots,j_t$ выполняется соотношение

$$\sum_{\sigma\in S_k} \sum_{I_\sigma} r_{\tilde\sigma(i_1),\ldots,\tilde\sigma(i_t)} r_{\tilde\sigma(i_{t+1}),\ldots,\tilde\sigma(i_n)} = 0, \tag{12}$$

где суммирование идет в первом случае по всем возможным перестановкам из симметрической группы S_k, а во втором – по множеству I_σ всех разбиений набора $(\tilde\sigma(i_1),\tilde\sigma(i_2),\ldots,\tilde\sigma(i_n))$ на два строго упорядоченных блока $(\tilde\sigma(i_1),\ldots,\tilde\sigma(i_k))$ и $(\tilde\sigma(i_{k+1}),\ldots,\tilde\sigma(i_t))$, т.е. блоки, в которых выполняется условие

$$\tilde\sigma(i_1) < \tilde\sigma(i_2) < \ldots < \tilde\sigma(i_k) \text{ и } \tilde\sigma(i_{k+1}) < \tilde\sigma(i_{k+2}) < \ldots < \tilde\sigma(i_n),$$

значение символа $r_{\tilde\sigma(i_1),\ldots,\tilde\sigma(i_t)}$ будет определяться по следующей схеме:

$$r_{\tilde\sigma(i_1),..,\tilde\sigma(i_t)} = \begin{cases} \partial_{\tilde\sigma(i_1),..,\tilde\sigma(i_t)}, \text{ если } \sigma(s_q) = i_k \text{ для некоторых } q \text{ и } k; \\ s_{\hat\sigma(i_1),..,\hat\sigma(i_t)}, \text{ если } \sigma(s_q) = j_k \text{ для некоторых } q \text{ и } k; \\ \partial s^{\tilde\sigma(p_1),...,\tilde\sigma(p_t)}_{\tilde\sigma(s_1),...,\tilde\sigma(s_t)}, \begin{array}{l} \text{если } \sigma(s_q) = i_k \text{ для некоторых } q \text{ и } k, \\ \sigma(p_q) = j_k \text{ для некоторых } q \text{ и } k. \end{array} \end{cases}$$

Рассмотрим **пример** использования соотношений (9), (12).

Рассмотрим последовательность (1, 2; 4). Символ «;» в данной записи будет отделять индексы, относящиеся к граням, от индексов, относящихся к вырождениям. Применяя все подстановки, получим следующие последовательности:

(1, 2; 4), (2, 1; 4), (1; 4; 2), (2; 4, 1), (4; 1, 2), (4; 2, 1).

Применим к каждой последовательности определения 3, 5. Получим последовательности (для наглядности выделены символы, относящиеся к вырождениям):

(1, 2, **4**), (1, 1, **4**), (1, **3**, 2), (1, **3** ,1), (**2**, 1, 2), (**2**, 1, 1).

Применяя описанное в определении 9 правило, получим симплициальное соотношение

$$\partial_{1,2}s_4 + \partial_1\partial s_2^4 + \partial_1\partial s_1^4 + \partial s_1^3\partial_1 + \partial s_1^3\partial_2 + s_2\partial_{1,2} = 0.$$

При этом заметим, что последовательности (**2**, 1, 1) не будет соответствовать ни одно упорядоченное разбиение на блоки, а последовательности (1, 2, **4**) будет соответствовать два таких разбиения.

Определенные выше S_∞-множества будут являться гомотопически устойчивыми аналогами симплициальных объектов.

3. Существование S_∞-множества

Покажем, что S_∞-множества существуют. Для этого сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1. На гомологиях цепного комплекса, на котором задана структура симплициального множества, грани и вырождения которого являются цепными отображениями, существует структура S_∞-множества.

Доказательство. То, что на гомологиях цепного комплекса существует структура S_∞-объекта, является следствием доказанных в [4, 5] теорем существования.

Приведем алгоритм построения отображений $\partial s^{j_1, j_2, ..., j_t}_{i_1, i_2, ..., i_k}$ на гомологиях цепного комплекса. Рассмотрим стандартную SDR-ситуацию цепных комплексов C и $H(C)$, т.е. систему отображений $\{\eta : C \to H(C){:}\xi,\ h\}$, если для отображений

$$h : C \to C,\ \eta : C \to H(C),\ \xi : H(C) \to C$$

выполняются следующие условия:

$$dh + hd = \xi\eta + id;\ h\xi = 0;\ \eta h = 0;\ hh = 0;\ \eta\xi = id. \tag{13}$$

Отображение $h : C \to C$ является гомотопией между отображением $\xi\eta$ и тождественным отображением. Отображение $\eta : C \to H(C)$ – выбор класса гомологий по представителю; отображение $\xi : H(C) \to C$ – выбор представителя в классе. В общем случае отображение ξ является неоднозначным, однако путем фиксации разложения C в прямую сумму $D \oplus H(C)$ однозначность отображения ξ может быть достигнута. Поскольку мы рассматриваем все модули над полем характеристики 2, то разложение в прямую сумму всегда существует и однозначно определяет отображение ξ путем выбора представителя из второго слагаемого. Заметим, что отображения η и ξ являются цепными, т.е. перестановочны с дифференциалом в соответствующих комплексах (дифференциал в комплексе гомологий рассматривается как тривиальный).

Теперь определим отображение $\partial s_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_t}$ следующим образом. Рассмотрим последовательность $i_1,\dots,i_k\ j_1,\dots,j_t$. Запишем соответствующую ей последовательность $\partial_{i_1},\partial_{i_2},\dots,\partial_{i_k},s_{j_1},s_{j_2},\dots,s_{j_t}$. Будем применять к каждой паре операторов из данной последовательности симплициальные соотношения до тех пор, пока это возможно. Получим набор последовательностей $\partial_{i_1},s_{j_1},\partial_{i_2},s_{j_2}\dots,\partial_{i_k},s_{j_t}$ (индексы могут изменяться в соответствии с соотношениями). Тогда определим отображение $\partial s_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_t}$ по формуле

$$\partial s_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_t} = \sum \eta(r_{t_1} h r_{t_2} h \dots . h r_{t_k})\xi, \tag{14}$$

где суммирование идет по всем полученным наборам последовательностей $\partial_{i_1},s_{j_1},\partial_{i_2},s_{j_2}\dots,\partial_{i_k},s_{j_t}$, а символ r_{t_k} обозначает грань или вырождение, в зависимости от того, какой из двух частей описываемого относится прообраз индекса t_k.

Покажем, что определенные таким образом операторы удовлетворяют высшим симплициальным соотношениям (10)–(12). Для этого рассмотрим действие дифференциала на операторе $\partial s_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_t}$. Последовательность $i_1,\dots,i_k\ j_1,\dots,j_t$ будем считать упорядоченной. Используя правило Лейбница, можем записать

$$d\left(\partial s_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_t}\right) = d\partial s_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_t} + \partial s_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_t} d .$$

Подставим в полученную формулу выражения для определения высших смешанных операторов из формулы (14). Получим следующее выражение:

$$d\left(\partial s_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_t}\right) = d\sum \eta(r_{t_1} h r_{t_2} h \dots . h r_{t_k})\xi + \sum \eta(r_{t_1} h r_{t_2} h \dots . h r_{t_k}) d\xi,$$

где параметр суммирования и значения символа r_{t_k} определяются аналогично формуле (14).

Поскольку отображения η, ξ, r_t – цепные, то дифференциалы можно внести в суммы и провести до первой встреченной гомотопии, т.е. получить выражение

$$d\left(\partial s_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_t}\right)=\sum\eta(r_{t_1}dhr_{t_2}h....hr_{t_k})\xi+\sum\eta(r_{t_1}hr_{t_2}h....hdr_{t_k})\xi.$$

Учитывая определение гомотопии, мы сможем в слагаемых, входящих в первую сумму, поменять дифференциал и гомотопию, т.е. получить выражение вида

$$d\left(\partial s_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_t}\right)=\sum\eta(r_{t_1}hdr_{t_2}h....hr_{t_k})\xi+\sum\eta(r_{t_1}r_{t_2}h....hr_{t_k})\xi+$$

$$+\sum\eta(r_{t_1}\xi\eta r_{t_2}h....hr_{t_k})\xi+\sum\eta(r_{t_1}hr_{t_2}h....hdr_{t_k})\xi. \tag{15}$$

Рассмотрим вторую сумму:

$$\sum\eta(r_{t_1}r_{t_2}h....hr_{t_k})\xi.$$

Она будет равна нулю, так как последовательности $r_{t_1}, r_{t_2}, r_{t_k}$ получены в результате действия симплициальных соотношений (i), (ii), (iii). Поэтому все наборы t_1, t_2, t_k можно будет разбить на пары, отличающиеся только первыми двумя числами, а остальные будут совпадать, причем отличие будет таковым:

$$\sum\eta(r_{t_1}r_{t_2}h....hr_{t_k})\xi=\sum\eta(r_{t_1}r_{t_2}+r_{t_2\pm1}r_{t_1}h....hr_{t_k})\xi.$$

Знак $\pm$ в последнем индексе зависит от того, грани или вырождения означают символы r_{t_2}. Если две грани или грань и вырождение, то ставится минус, что соответствует операции $\tilde{r}$; если два подряд вырождения, то ставится +, что соответствует операции $\hat{r}$. Учитывая симплициальные соотношения (i), (ii), (iii), выражение в каждой из скобок равно нулю, независимо от знака. Поэтому формула (15) примет вид

$$d\left(\partial s_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_t}\right)=\sum\eta(r_{t_1}hdr_{t_2}h....hr_{t_k})\xi+$$

$$+\sum\eta(r_{t_1}\xi\eta r_{t_2}h....hr_{t_k})\xi+\sum\eta(r_{t_1}hr_{t_2}h....hdr_{t_k})\xi.$$

Продолжим процесс далее. Пользуясь тем, что отображения η, ξ, r_t цепные, продолжим движение дифференциала по первой сумме. Затем будем последовательно заменять dh на $hd + id + \xi\eta$. Получим

$$d\left(\partial s_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_t}\right)=\sum\eta(r_{t_1}hdr_{t_2}h....hr_{t_k})\xi+\sum\eta(r_{t_1}hr_{t_2}\xi\eta....hr_{t_k})\xi+$$

$$+\sum\eta(r_{t_1}\xi\eta r_{t_2}h....hdr_{t_k})\xi+\sum\eta(r_{t_1}hr_{t_2}r_{t_3}....hr_{t_k})\xi+\sum\eta(r_{t_1}hr_{t_2}h....hdr_{t_k})\xi.$$

По соображениям, аналогичным ранее приведенным, четвертое слагаемое будет равно нулю. Продолжая данный процесс, получим

$$d\left(\partial s_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_t}\right)=\sum\eta(r_{t_1}r_{t_2}h...\xi\eta...hr_{t_k})\xi,$$

где суммирование идет, кроме всех наборов $t_1, t_2, \ldots, t_k$, еще и по всем местам, на которых может стоять отображение $\xi\eta$. Поскольку будут перебраны все возможные варианты перемножений каждого из наборов на другой, то для доказательства теоремы становится достаточно заметить, что из всевозможных последовательностей $r_{t_1}, r_{t_2}, ..., r_{t_k}$, входящих в определение смешанного высшего оператора, только одно является упорядоченным, т.е. удовлетворяет условию $t_1 \le t_2 \le ... \le t_k$. Следует заметить, что выражение $\sum \eta r_{t_1} h r_{t_2} .. \xi$ определяет либо смешанный высший оператор, либо высшую грань, либо высшее вырождение, причем в обоих случаях – упорядоченные.

Таким образом, мы получим, что

$$d\left(\partial s_{i_1,i_2,...,i_k}^{j_1,j_2,...,j_t}\right) = \sum_{\sigma \in S_k} \sum_{I_\sigma} r_{\tilde{\sigma}(i_1),..,\tilde{\sigma}(i_t)} r_{\tilde{\sigma}(i_{t+1}),..,\tilde{\sigma}(i_n)} = 0,$$

где символы $r_{\tilde{\sigma}(i_1),..,\tilde{\sigma}(i_t)}$ понимаются в смысле определения 9, суммирование идет по всем упорядоченным блокам и всем подстановкам симметрической группы. Так как дифференциал в гомологиях равен нулю, мы получаем

$$\sum_{\sigma \in S_k} \sum_{I_\sigma} r_{\tilde{\sigma}(i_1),..,\tilde{\sigma}(i_t)} r_{\tilde{\sigma}(i_{t+1}),..,\tilde{\sigma}(i_n)} = 0,$$

что и требовалось доказать. Эти рассуждения позволяют сделать вывод о справедливости утверждения теоремы.

Список литературы

1. **Кадеишвили, Т. В.** К теории гомологий расслоенных пространств / Т. В. Кадеишвили // Успехи математических наук. – 1980. – Т. 35, № 3 (213). – С. 183–188.
2. **Смирнов, В. А.** A_∞-симплициальные объекты и A_∞-топологические группы / В. А. Смирнов // Математические заметки. – 1999. – Т. 66, № 6. – С. 913–919.
3. **Ладошкин, М. В.** Аналог симплициальных граней в A_∞-случае / М. В. Ладошкин // Вестник МГОУ. Сер. Физика-математика. – 2011. – № 3. – С. 10–18.
4. **Ладошкин, М. В.** Построение аналога симплициальных вырождений в A_∞-случае / М. В. Ладошкин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 2. – С. 80–90.
5. **May, J. P.** Simplicial objects in algebraic topology / J. P. May // Van Nostred, Math. Studies. – 1967. V. 11. – 162 p.

Ладошкин Михаил Владимирович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики, Мордовский государственный педагогический институт имени М. Е. Евсевьева (г. Саранск)

Ladoshkin Mikhail Vladimirovich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematics, Mordovia State Pedagogical University named after M. E. Evsevyev (Saransk)

E-mail: michldosh@gmail.com

УДК 512.662.1

Ладошкин, М. В.

Гомотопически устойчивый аналог симплициального объекта / М. В. Ладошкин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 4 (24). – С. 3–11.